

Analyse numérique de processus stochastiques branchants critiques

LECOQ

Août 2023

I - Mouvement
brownien
branchant critique

- 1) Mouvement brownien
branchant
- 2) Clusters

II - Neutronique

- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des
processus
- 4) Résultats

Si le temps le
permet...

... on peut regarder des
jolies simulations

Que se passe-t-il quand un ivrogne qui rentre du bar...

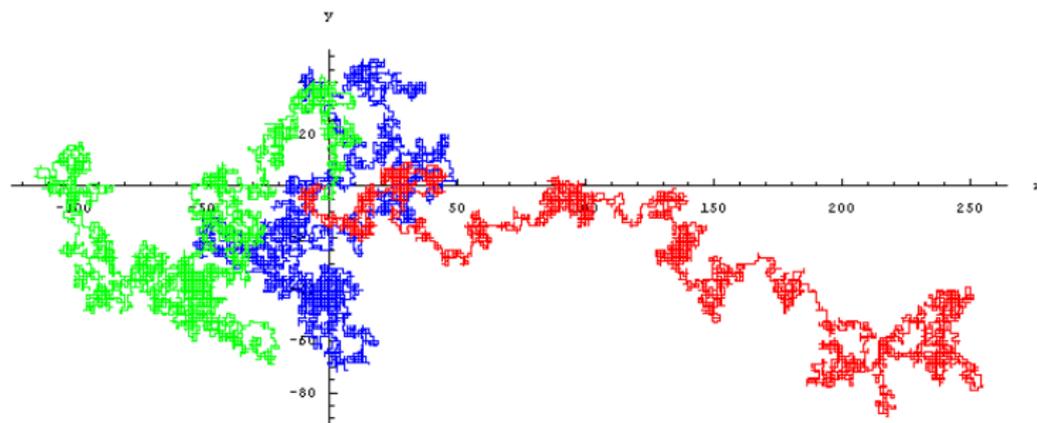


Figure: Marche aléatoire dans Z^2

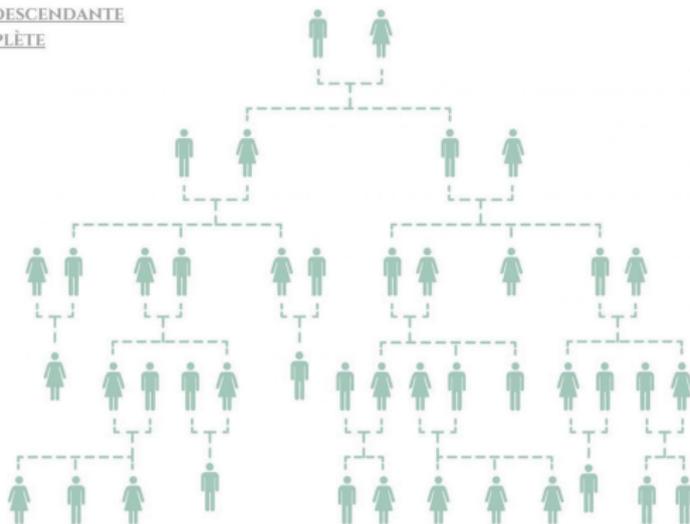
- 1) Mouvement brownien branchant
- 2) Clusters

- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des processus
- 4) Résultats

... on peut regarder des
jolies simulations

... rencontre un généalogiste ?

GÉNÉALOGIE DESCENDANTE
COMPLÈTE



Ancêtres
Famili



Figure: Arbre de généalogie

Analyse numérique
de processus
stochastiques
branchants
critiques

LECOQ

I - Mouvement
brownien
branchant critique

- 1) Mouvement brownien branchant
- 2) Clusters

II - Neutronique

- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des processus
- 4) Résultats

Si le temps le
permet...

... on peut regarder des
jolies simulations

Ils branchent

- 1) Mouvement brownien branchant
- 2) Clusters

- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des processus
- 4) Résultats

... on peut regarder des
jolies simulations

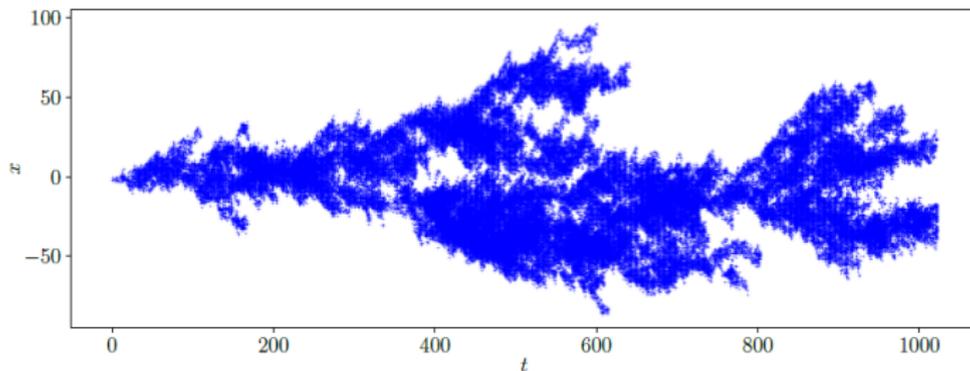


Figure: Mouvement brownien branchant

Sommaire

I - Mouvement brownien branchant critique

- 1) Mouvement brownien branchant
- 2) Clusters

II - Neutronique

- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des processus
- 4) Résultats

Si le temps le permet...

... on peut regarder des jolies simulations

Contents

I - Mouvement brownien branchant critique

- 1) Mouvement brownien branchant
- 2) Clusters

II - Neutronique

- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des processus
- 4) Résultats

Si le temps le permet...

... on peut regarder des jolies simulations

Analyse numérique
de processus
stochastiques
branchants
critiques

LECOQ

I - Mouvement
brownien
branchant critique

- 1) Mouvement brownien
branchant
- 2) Clusters

II - Neutronique

- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des
processus
- 4) Résultats

Si le temps le
permet...

... on peut regarder des
jolies simulations

Loi de déplacement

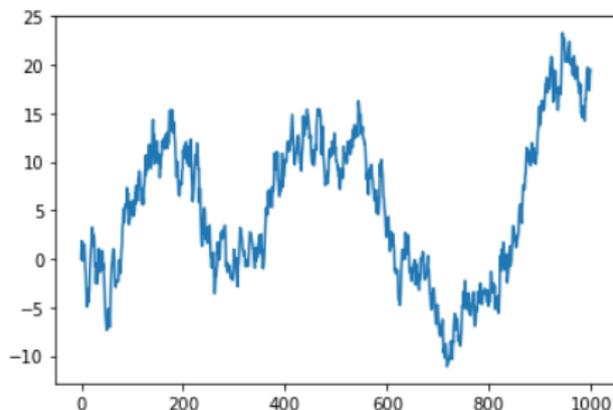


Figure: Mouvement brownien : élasticité courte distance

On s'intéresse dans la suite seulement au mouvement brownien :

Cela signifie simplement qu'entre t et $t + \Delta t$,
 $\Delta x \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 = D\Delta t)$ et que la trajectoire est continue.

Mouvement brownien branchant critique

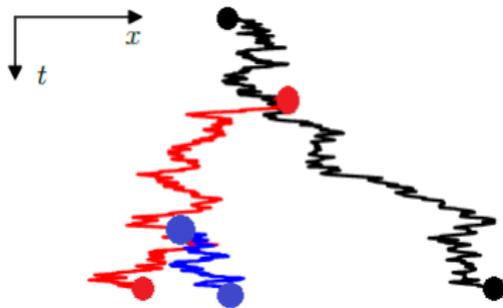


Figure: Mouvement brownien branchant

- ▶
$$\begin{cases} P(\text{Mort entre } t \text{ et } t + \Delta t) = e^{-\beta\Delta t} \\ P(\text{Duplication entre } t \text{ et } t + \Delta t) = e^{-\beta\Delta t} \end{cases}$$
- ▶ Suit un mouvement brownien de coefficient de diffusion D .

I - Mouvement brownien branchant critique

- 1) Mouvement brownien branchant
- 2) Clusters

II - Neutronique

- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des processus
- 4) Résultats

Si le temps le
permet...

... on peut regarder des
jolies simulations

Pour faciliter les simulations numériques, on préfère un procédé analogue, qui fait partie de la même classe universelle de processus.

- ▶ On discrétise le temps par pas de 1.
- ▶
$$\begin{cases} P(\text{Mort entre } t \text{ et } t + 1) = 1/2 \\ P(\text{Duplication entre } t \text{ et } t + 1) = 1/2 \end{cases}$$
- ▶ Entre l'instant où une particule apparaît et meurt, elle suit un mouvement brownien de coefficient de diffusion D .

Contents

I - Mouvement brownien branchant critique

- 1) Mouvement brownien branchant
- 2) Clusters

II - Neutronique

- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des processus
- 4) Résultats

Si le temps le permet...

... on peut regarder des jolies simulations

Correlation spatiale

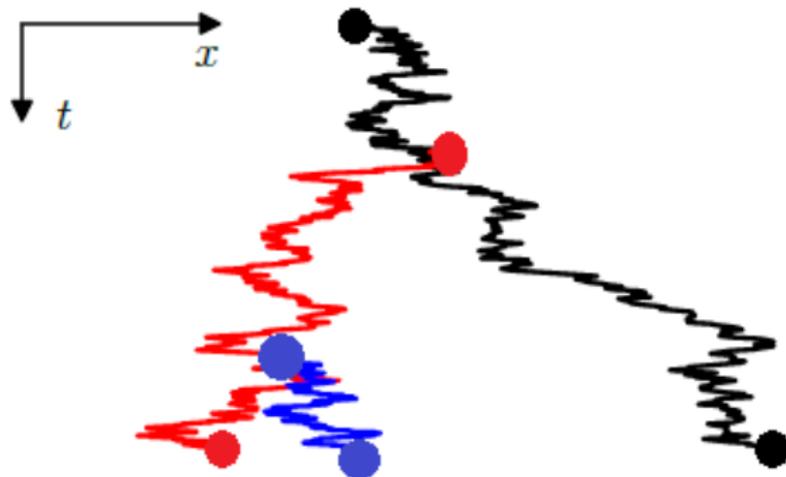


Figure: Mouvement brownien branchant

Rouge et bleu sont corrélés spatialement par la loi de duplication

- 1) Mouvement brownien branchant
- 2) Clusters

- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des processus
- 4) Résultats

Si le temps le
permet...

... on peut regarder des
jolies simulations

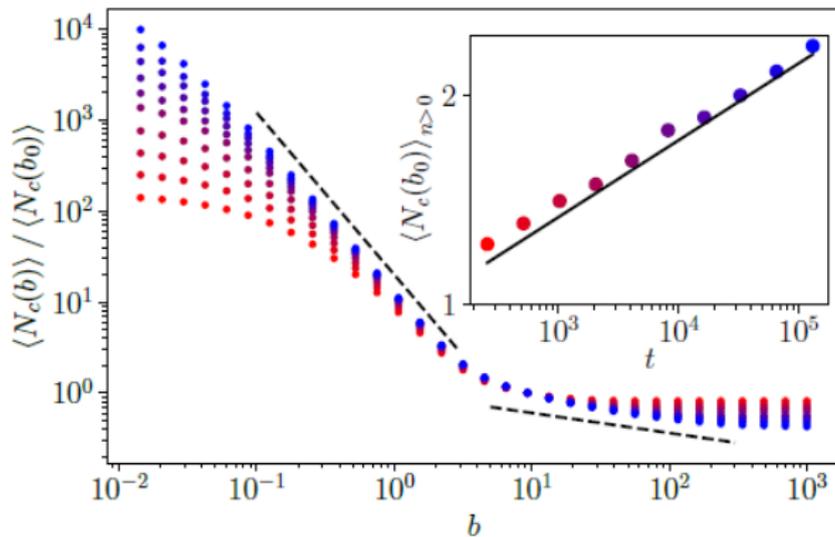


Figure: Image principale : $\langle N_c(b) \rangle_{\text{non-ex}}$ pour $t = 2^8, \dots, 2^{17}$.
 Les traits en pointillés sont les valeurs théoriques. Image
 secondaire : $N_c(b_0)_{\text{non-ex}}$ en fonction du temps.

$$N_c(b_0) \simeq t^{0.11}$$

Contents

I - Mouvement brownien branchant critique

- 1) Mouvement brownien branchant
- 2) Clusters

II - Neutronique

- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des processus
- 4) Résultats

Si le temps le permet...

... on peut regarder des jolies simulations

Neutrons dans un réacteur nucléaire

Entre t et $t + dt$, les neutrons :

- ▶ se déplacent selon un mouvement brownien.
- ▶ peuvent être absorbés par le milieu avec probabilité βdt .
- ▶ peuvent fissurer un atome ce qui crée un offspring à la même position avec probabilité βdt .
- ▶ sont en nombre constant $N_{\text{neutrons}}(t) = N = cte$.

On reconnaît le mouvement brownien branchant critique, avec une contrainte sur le nombre de particules à tout instant.

Ancêtre commun

On a le résultat suivant :

À partir d'un certain temps $\tau \sim N$, seul un des neutrons initiaux sera l'ancêtre commun de tous les neutrons vivants.

Statistique stationnaire : $N_c(b, t) = N_c(b, N)$.

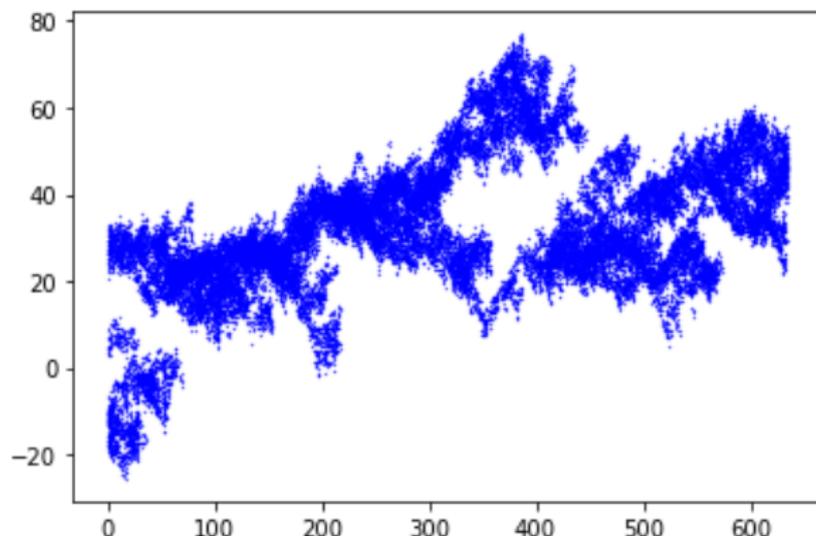


Figure: Simulation pour $N = 64$ neutrons sur $t = 700$ générations

- 1) Mouvement brownien branchant
- 2) Clusters

- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des processus
- 4) Résultats

... on peut regarder des
jolies simulations

Le phénomène de clustering modélise l'inhomogénéité spatiale de la position des neutrons, et donc de l'énergie !

Objectif :

Comparer la statistique neutronique des clusters à celle du mouvement brownien branchant déjà bien étudié.

Contents

I - Mouvement brownien branchant critique

- 1) Mouvement brownien branchant
- 2) Clusters

II - Neutronique

- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des processus
- 4) Résultats

Si le temps le permet...

... on peut regarder des jolies simulations

Retour vers le futur

- ▶ Méthode backward
- ▶ Faster than the clock

- 1) Mouvement brownien
branchant
- 2) Clusters

- 1) Modèle
- 2) **Implémentation**
- 3) Comparaison des
processus
- 4) Résultats

... on peut regarder des
jolies simulations

Contents

I - Mouvement brownien branchant critique

- 1) Mouvement brownien branchant
- 2) Clusters

II - Neutronique

- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des processus
- 4) Résultats

Si le temps le permet...

... on peut regarder des jolies simulations

Comment comparer ?

On connaît la loi de $\langle N_c(b_0, t) \rangle_{n \neq 0, \text{non-ex}}$ mais comment la comparer à $\langle N_c(b_0, N) \rangle_{\text{non-ex}}$?

► On utilise $\mathbb{E}[S_n | S_n \neq 0] = n/2$.

En moyennant sur $\langle N_c(b_0, t = 2N) \rangle_{n \neq 0, \text{non-ex}}$, cela revient à faire une moyenne sur des familles de N individus !

- 1) Mouvement brownien branchant
- 2) Clusters

- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des processus
- 4) Résultats

... on peut regarder des
jolies simulations

Contents

I - Mouvement brownien branchant critique

- 1) Mouvement brownien branchant
- 2) Clusters

II - Neutronique

- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des processus
- 4) Résultats

Si le temps le permet...

... on peut regarder des jolies simulations

Loi des N_c

Evolution de $\log(N_c)$ fonction de $\log(N)$ pour $b = 5$, $dt = 1$, $D = 1$

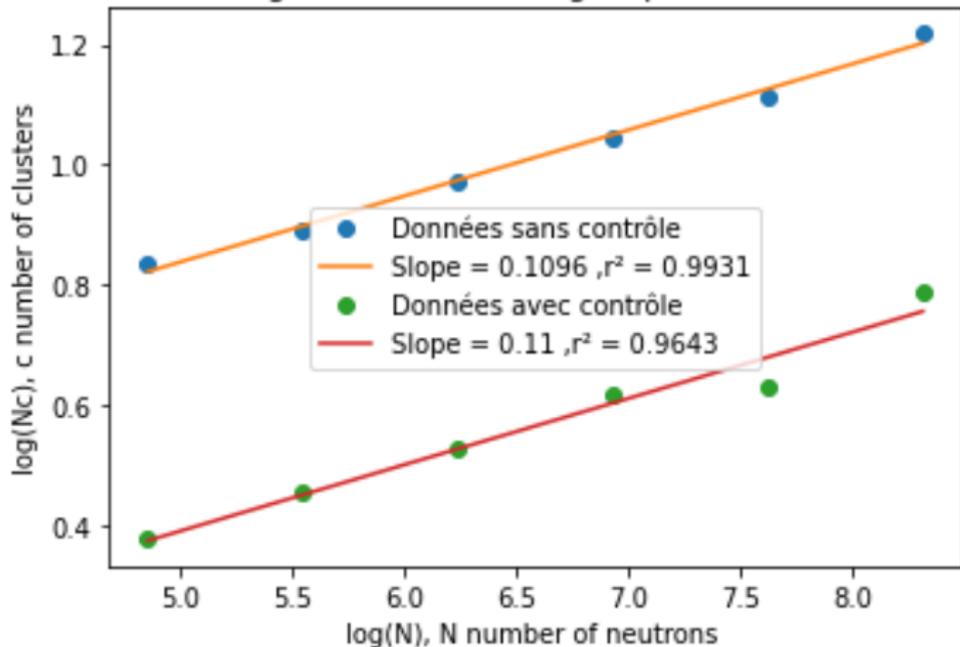


Figure: Superposition des deux graphes

Asymptotiquement, les deux processus semblent être équivalents :

→ Ils font peut-être partie de la même classe universelle de processus.

→ Peut-être qu'ils sont différents à une fonction négligeable près.

→ Raison mystère.

- 1) Mouvement brownien branchant
- 2) Clusters

- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des processus
- 4) Résultats

... on peut regarder des
jolies simulations

Asymptotiquement, les deux processus semblent être équivalents :

→ Ils font peut-être partie de la même classe universelle de processus.

→ Peut-être qu'ils sont différents à une fonction négligeable près.

→ Peut-être que j'ai fait n'importe quoi.

- 1) Mouvement brownien branchant
- 2) Clusters

- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des processus
- 4) Résultats

... on peut regarder des
jolies simulations

- ▶ Calculer la valeur efficace ($\langle N_c^2 \rangle$) de N_c plutôt que sa moyenne.
- ▶ Reproduire l'approche backward dans le cas anarchique .

- 1) Mouvement brownien branchant
- 2) Clusters

- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des processus
- 4) Résultats

... on peut regarder des
jolies simulations

- 1) Mouvement brownien branchant
- 2) Clusters

- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des processus
- 4) Résultats

... on peut regarder des
jolies simulations

Une autre approche proposée pour vérifier les résultats utilise la notion de martingale qui n'a pas encore été traitée :

$$P(N_{t-1} = N_t \pm 1 | N_t) = 1/2, \text{ sinon } P(N_{t-1} = n | N_t) = 0.$$

La conjecture à vérifier est que l'exposant serait indépendant de la loi $P(N_{t-1} | N_t)$.

Contents

I - Mouvement brownien branchant critique

- 1) Mouvement brownien branchant
- 2) Clusters

II - Neutronique

- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des processus
- 4) Résultats

Si le temps le permet...

... on peut regarder des jolies simulations

Analyse numérique
de processus
stochastiques
branchants
critiques

LECOQ

I - Mouvement
brownien
branchant critique

- 1) Mouvement brownien
branchant
- 2) Clusters

II - Neutronique

- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des
processus
- 4) Résultats

Si le temps le
permet...

... on peut regarder des
jolies simulations

Jolies simulations du mouvement brownien

- 1) Mouvement brownien branchant
- 2) Clusters

- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des processus
- 4) Résultats

... on peut regarder des
jolies simulations

Déplacement génération par génération pour $N = 20$ générations

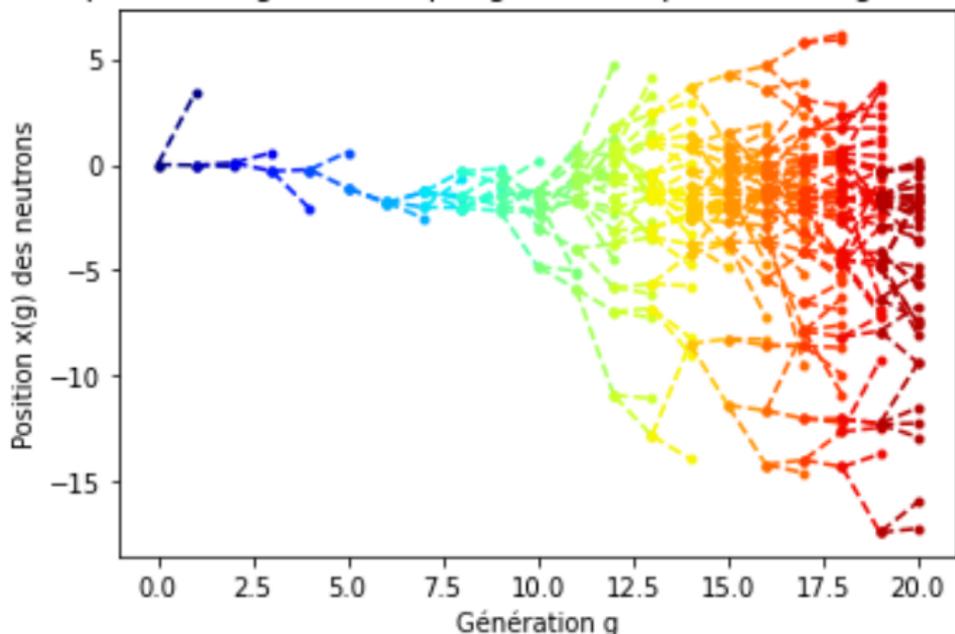


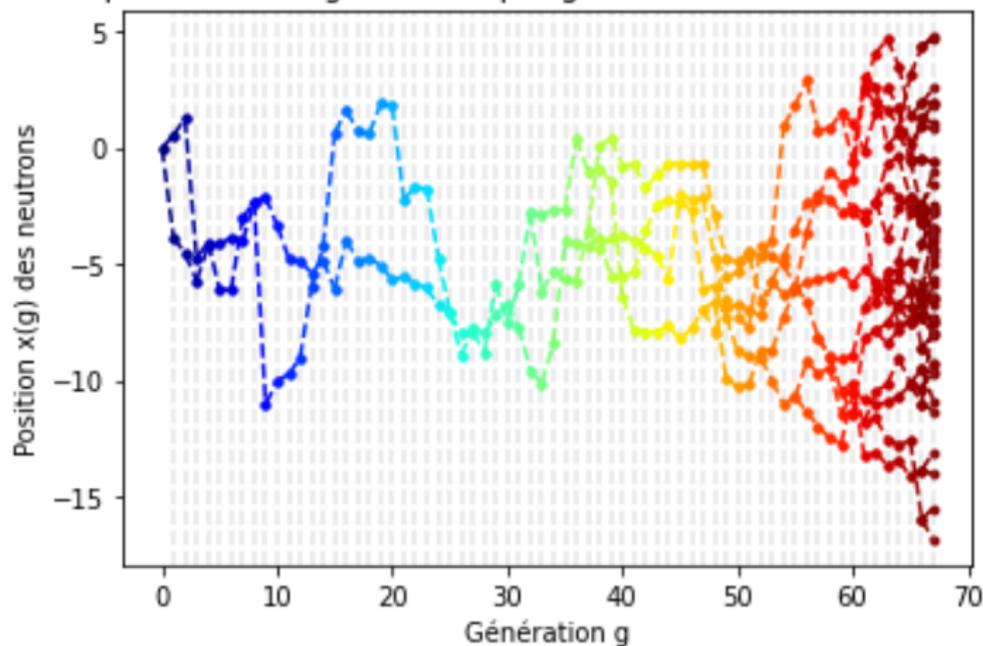
Figure: Évolution du mouvement brownien branchant avec lien de parentés

Jolies simulations du mouvement brownien avec contrôle

Analyse numérique
de processus
stochastiques
branchants
critiques

LECOQ

Déplacement en génération par génération de $N = 50$ neutrons



I - Mouvement
brownien
branchant critique

- 1) Mouvement brownien branchant
- 2) Clusters

II - Neutronique

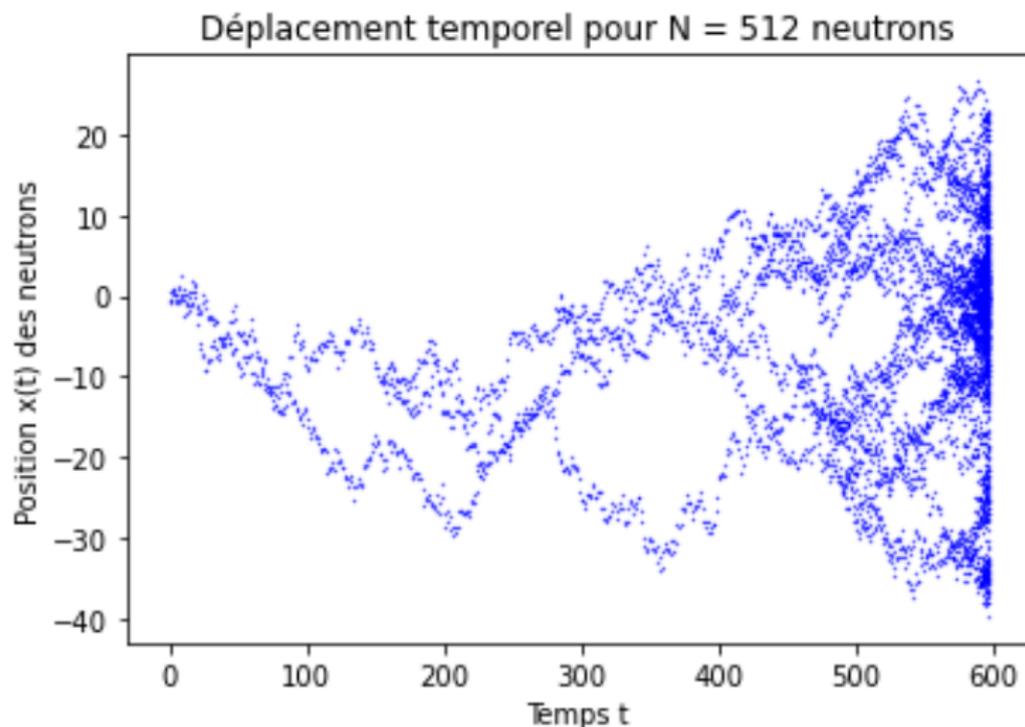
- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des processus
- 4) Résultats

Si le temps le
permet...

... on peut regarder des
jolies simulations

Figure: Évolution de la neutronique avec lien de parentés

Jolies simulations du mouvement brownien



I - Mouvement brownien branchant critique

- 1) Mouvement brownien branchant
- 2) Clusters

II - Neutronique

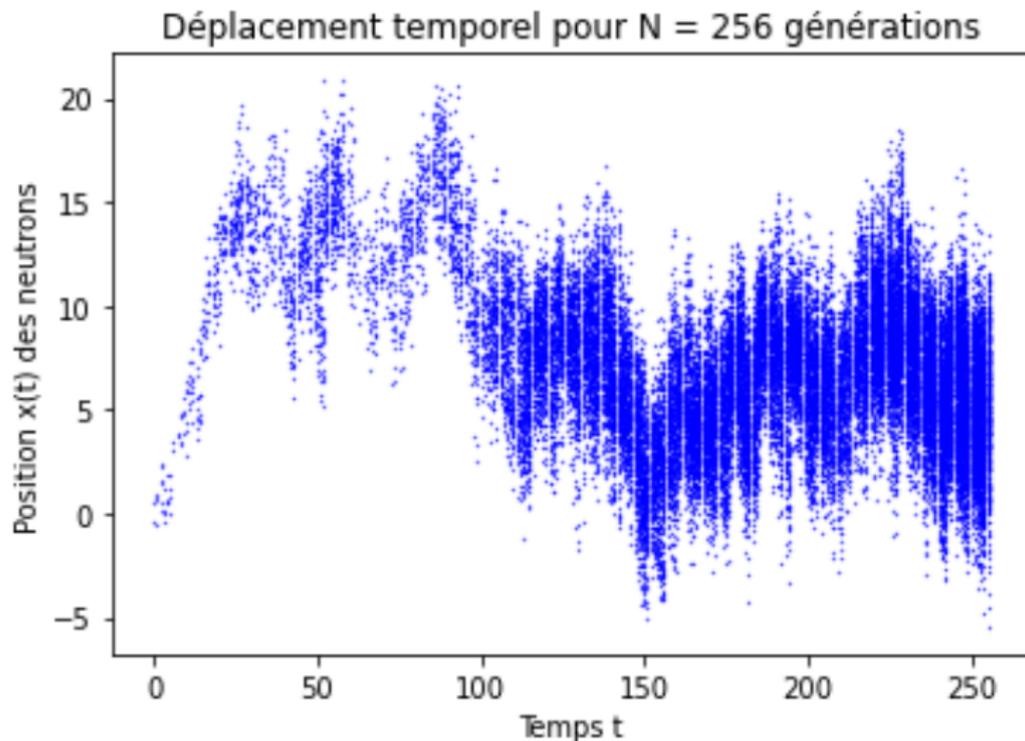
- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des processus
- 4) Résultats

Si le temps le
permet...

... on peut regarder des
jolies simulations

Figure: Évolution de la neutronique

Jolies simulations du mouvement brownien sans contrôle



I - Mouvement brownien branchant critique

- 1) Mouvement brownien branchant
- 2) Clusters

II - Neutronique

- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des processus
- 4) Résultats

Si le temps le permet...

... on peut regarder des jolies simulations

Figure: Augmentation significative de la population

Jolies simulations avec des sauts de Pareto

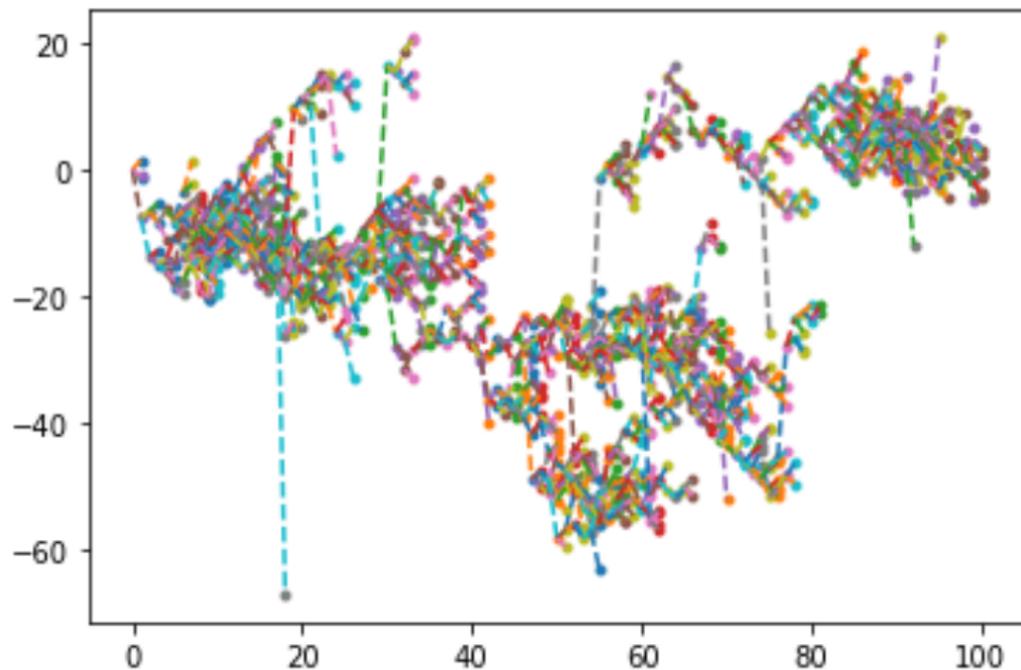


Figure: Déplacement en fonction du temps en 1D

- 1) Mouvement brownien branchant
- 2) Clusters

- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des processus
- 4) Résultats

... on peut regarder des
jolies simulations

Jolies simulations avec des sauts de Pareto

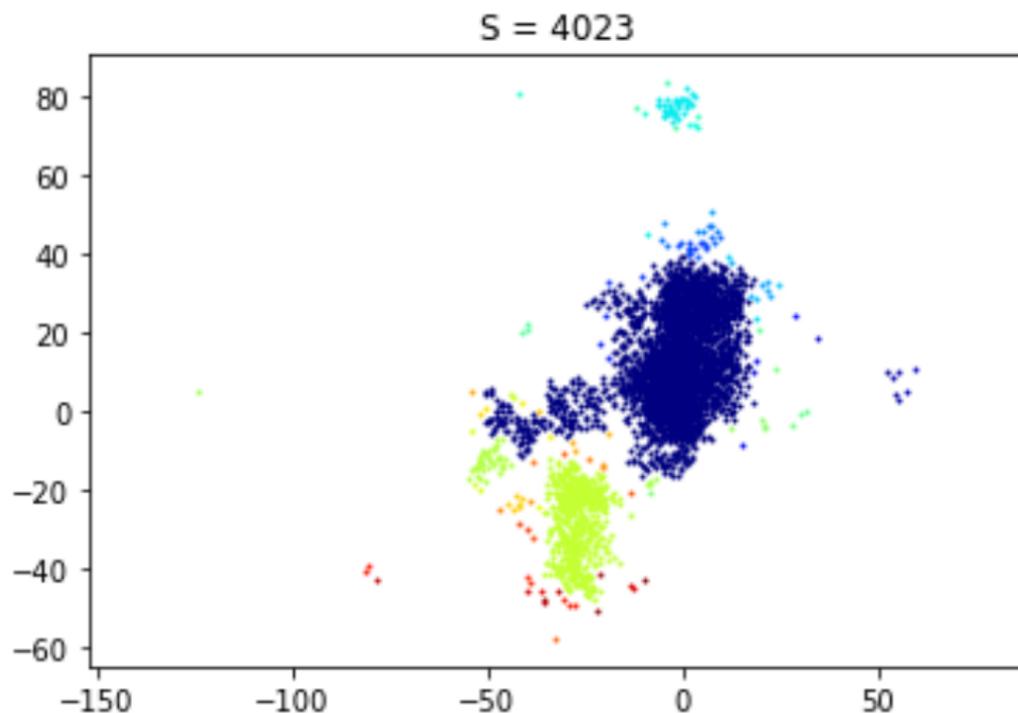


Figure: Clusters en 2D, $\alpha = 2, b = 1$

- 1) Mouvement brownien branchant
- 2) Clusters

- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des processus
- 4) Résultats

... on peut regarder des
jolies simulations

Jolies simulations avec des sauts de Pareto

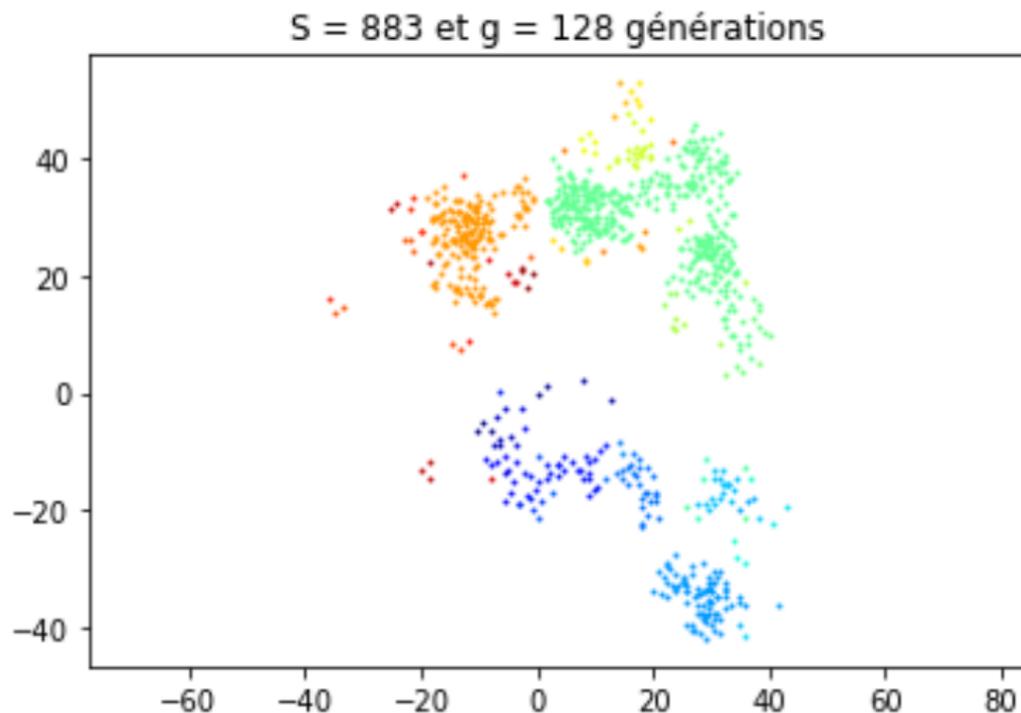


Figure: Clusters en 2D, $\alpha = 2, b = 1$ sur $g = 128$ générations

- 1) Mouvement brownien branchant
- 2) Clusters

- 1) Modèle
- 2) Implémentation
- 3) Comparaison des processus
- 4) Résultats

... on peut regarder des
jolies simulations